

CÁLCULO III Matemáticas e Informática Curso 2015/2016	1 ^{er} Apellido: _____	02/11/2015	
	2 ^o Apellido: _____	Tiempo: 2h	
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: _____	Calificación: 	
	Número de matrícula: 		

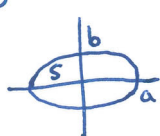
PRIMER PARCIAL

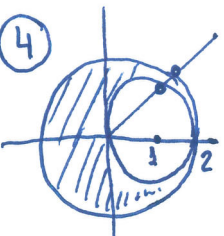
1. (1 punto) Calcula el valor de la siguiente integral: $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\tan x} dx$.
2. (1 punto) Justifica si es o no integrable la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 0 sobre el conjunto de Cantor y 1 fuera de él. En caso afirmativo, ¿cuál es el valor de la integral?
3. (1 punto) Calcula razonadamente el área del recinto interior a la elipse de semiejes a y b .
4. (2 puntos) Calcula la masa de una placa S representada por el recinto interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$, y con densidad puntual $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. (2 puntos) Calcula el volumen del recinto interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y exterior al cono $x^2 + y^2 = z^2$.
6. (1 punto) Calcula la integral sobre todo el espacio \mathbb{R}^3 de la función $f(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
7. (2 puntos) Sea γ la curva parametrizada por $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - (a) Calcula la masa de un cable con la forma de γ y densidad puntual $\delta(x, y, z) = \sqrt{z}$.
 - (b) Calcula la integral sobre γ del campo vectorial $F(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \sqrt{z}\mathbf{k}$.

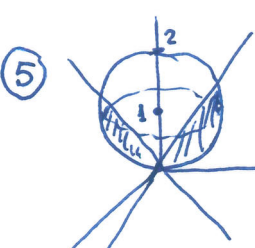
SOLUCIONES

① $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\tan x} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} x \cdot \cos^{-1/3} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

② Discontinuidades de $f = C$ y tiene medida nula. Luego f es integrable e $\int_0^1 f = 1$

③ $A = \pi ab$  $A = \iint_S dx dy = \left(\begin{matrix} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{matrix} \right) = \dots = \pi ab$

④  $m = \iint_S \delta(x, y) dx dy = 2 \left[\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2 \cos \theta}^2 \rho \cdot \rho d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho \right] = \frac{48\pi - 32}{9}$

⑤  $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = (\text{exterior}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \dots = \frac{\pi}{3}$

